E.N.S.I. DE CHIMIE NORD option P 1979

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Soient d un entier $\geqslant 0$ et E_d l'ensemble formé du polynôme 0 et des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant d$; E_d est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On définit les polynômes p_k (k entier $\geqslant 0$) par

$$p_0(X) = 1, \quad p_k(X) = \frac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1) \text{ pour } k \geqslant 1$$

1° Montrer que $B = \{p_0, \dots, p_d\}$ est une base de E_d.

2° Soit H l'application qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $H(P)$ tel que $H(P)(X) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que la restriction à E_d de H est un endomorphisme h_d de l'espace vectoriel E_d et donner l'expression de la matrice de h_d dans la base B de E_d.

3° Pour m entier $\geqslant 1$ on définit $h_d^m = h_d \circ \dots \circ h_d$ (composé de m endomorphismes égaux à h_d). Déterminer $h_d^m(p_k)$ pour $k = 0, \dots, d$, et $m \geqslant 1$ et donner l'expression de la matrice de h_d^m dans la base B.

4° Déterminer l'expression $P = \sum_{k=0}^{d} \xi_k p_k$ d'un polynôme quelconque $P \in E_d$ dans la base B (on exprimera les ξ_k à l'aide de P et de l'endomorphisme h_d).

II

Soient $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle et R le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$). On supposera R strictement positif. On pose :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad |x| < R$$

1° Quels sont le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $p_k(n)\, a_n x^n$ (k entier $\geqslant 0$ fixé) ?

2° Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, déterminer le rayon de convergence et la somme — exprimée notamment à l'aide de S et ses premières dérivées — de la série entière de terme général $P(n)\, a_n x^n$.

III

Dans cette partie r est un entier $\geqslant 0$, s un réel quelconque, R un réel positif fixé, I l'intervalle $]-R, R[$, $I_1 =]-R, 0[$, $I_2 =]0, R[$. F_r est l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions :

f est continue sur I;

$x^{-r} f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0.

1° Montrer que lorsque r et s sont fixés tels que $r + s > 0$, pour tout $f \in F_r$ et tout $x \in I$ l'intégrale $\int_0^1 t^{s-1} f(xt)\, dt$ est convergente.

2° Lorsque $f \in F_r$ et $r + s > 0$, on désignera désormais par $\Phi_s(f) : I \to \mathbb{R}$ la fonction telle que :

$$\Phi_s(f)(x) = \int_0^1 t^{s-1} f(xt)\, dt \quad x \in I$$

Montrer que si $f \in F_r$, $\Phi_s(f) \in F_r$ (en particulier $\Phi_s(f)$ est continue). On pourra faire, lorsque $x \neq 0$, le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale.

Montrer que F_r est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel et que $\Phi_s : f \longmapsto \Phi_s(f)$ est un endomorphisme de cet espace vectoriel.

3° s étant un réel fixé on considère l'équation différentielle

$$(e) \qquad xy' + sy = f(x)$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée. Trouver les solutions y de (e) sur chacun des intervalles I_1 et I_2.

(On pourra remarquer que

$$(\text{signe de } x) \times |x|^{s-1}(xy' + sy) = \frac{d}{dx}(|x|^s y), \quad x \neq 0;$$

la solution générale de (e) comporte une intégrale non calculable explicitement et contenant f.)

.../...

Donner l'expression de y lorsque f est un polynôme.

Montrer que, si $f \in F_r$ et $r + s > 0$, $y = \Phi_s(f)$ est l'unique fonction $y : I \to \mathbb{R}$ telle que $y \in F_r$ et y vérifie (e) sur chacun des intervalles I_1 et I_2.

4° On suppose que f est développable en série entière de rayon de convergence $\geqslant R$. Montrer que, lorsque s n'est pas un entier $\leqslant 0$, (e) admet au plus une solution y développable en série entière de rayon de convergence $\geqslant R$ et exprimer cette solution à l'aide de l'endomorphisme Φ_s, de f, et de deux polynômes convenablement choisis (on pourra choisir r tel que $r + s > 0$ et remarquer qu'il existe alors un polynôme A nul ou de degré $\leqslant r - 1$ tel que $f - A \in F_r$).

IV

Les notations sont celles des parties II et III et $\Omega(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle réelle non réduite à un polynôme, dont tous les pôles sont réels et ne sont pas entiers $\geqslant 0$.

1° Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $\Omega(n)\, a_n\, x^n$?

2° Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n+s}$ (s réel et non entier $\leqslant 0$) à l'aide de Φ_s, S (somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$) et deux polynômes convenablement choisis.

Calculer de même la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{(n+s)^p}$ où p est entier $\geqslant 0$.

3° Calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n)\, a_n\, x^n$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail